

A noção de conjunto

Prof. Luciano Bedin-Departamento de Matemática-UFSC

Como explicar o que é um conjunto? Uma primeira tentativa seria afirmar que um conjunto é uma coleção ou um agrupamento de objetos. Isso não responde à nossa questão pois teríamos de definir o que é uma coleção ou agrupamento e retornaríamos ao mesmo problema. Intuitivamente, sabemos que um conjunto é formado por objetos (concretos ou abstratos) os quais denominamos *elementos*.

Dessa forma, uma maneira de abordar a questão é aceitar que um conjunto é algo que não definimos mas que sabemos que é composto por elementos. Dizemos que os elementos *pertencem* ao conjunto. Assim como a noção de conjunto, a ideia de pertencer é primitiva e não é definida, assim como os pontos e retas do plano que são objetos primitivos da Geometria.

Se pensarmos na noção de conjunto como sendo algo composto por elementos, podemos imaginar vários tipos de conjuntos: conjunto de letras do alfabeto, conjunto de pessoas numa sala, conjunto de pontos de uma reta, conjuntos de números naturais, etc... Usamos letras maiúsculas do alfabeto para denotar um conjunto, seus elementos podem ser denotados por diversos símbolos, dependendo da sua natureza. Exemplos: $X = \{janeiro, abril, outubro\}$, $Y = \{azul, verde, amarelo, branco\}$, $A = \{a, b, c, x, y\}$, $R = \{I, II, III, IV, V, VI, \dots\}$. O símbolo \in (relação de pertinência) é utilizado para denotar que um elemento pertence a um conjunto. Por exemplo, $a \in A$, $branco \in Y$, $III \in R$. Usa-se a notação \notin para indicar que um objeto não pertence ao conjunto. Exemplo: $z \notin A$, $marrom \notin Y$.

Às vezes, os elementos de um conjunto são apenas descritos e não são explicitados como nos exemplos acima. Por exemplo, C é o conjunto formado por todos os pontos de um plano, S é o conjunto formado pelas pessoas presentes na sala de aula, etc... Quando escrevemos um conjunto explicitando todos os seus elementos como em $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ dizemos que estamos representando o conjunto por *extensão*. Quando não explicitamos os membros do conjunto, mas dizemos que o conjunto é formado por elementos que satisfazem alguma propriedade em comum temos a representação do conjunto por *compreensão*. Por exemplo:

$$P = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ é par}\}.$$

É importante observarmos que um conjunto pode ter como elementos outros conjuntos! Por exemplo, sabemos que uma reta é um conjunto cujos elementos são pontos, então o conjunto V cujos elementos são todas as retas de um plano é um conjunto que tem por elementos outros conjuntos. Nesse sentido podemos pensar em conjuntos como $T = \{1, 2, 3, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ (que é diferente de $T = \{1, 2, 3\}$). Nesse caso, podemos escrever $\{1\} \in T$, $\{2\} \in T$, $\{3\} \in T$, $1 \in T$, $2 \in T$, $3 \in T$. Outros exemplos:

$$B = \{a, b, \{a, b\}, \{a, \{a\}\}, \{b, \{b\}\}\}, D = \{\mathbb{N}, a, b, 1\}.$$

E podemos usar a imaginação! Por exemplo, podemos pensar no conjunto formado por todos os conjuntos que tem um único elemento. Esse conjunto é imenso!

Podemos pensar ainda em conjuntos mais esquisitos. Por exemplo, será que podemos ter um conjunto do tipo $U = \{U, a, b, 1\}$? Ou seja um conjunto que tem como elemento o próprio conjunto U ? Nesse caso temos $U \in U$. Parece estranho pensarmos num conjunto desse tipo e é difícil imaginarmos tal conjunto, mas se pensarmos que conjunto é simplesmente algo composto por elementos, não há nada que impeça formarmos um conjunto desse tipo, por mais estranho que ele seja. Um exemplo que ilustra um conjunto que pertence a si mesmo é um catálogo de todos os livros de uma biblioteca, o catálogo em si é um livro e pode estar incluído no catálogo.

A formação de conjuntos como discutida acima é extremamente liberal e permite obtermos conjuntos dos mais variados tipos e tamanhos. Por exemplo, podemos pensar no seguinte conjunto: M é o conjunto cujos elementos são todos os conjuntos Q que não são elementos de si próprios. Ou seja, M tem como elementos todos os conjuntos que satisfazem $Q \notin Q$, o conjunto U definido acima não pertence a M , os outros conjuntos acima que vimos como exemplo pertencem a M . Mas nesse caso, é natural pensarmos: será que $M \in M$? Bom, se tivermos $M \in M$ então, pela definição de M , M não deveria ser elemento de M , o que é absurdo. Então devemos ter $M \notin M$, mas novamente pela definição de M , devemos ter $M \in M$! Ou seja, temos uma situação paradoxal que é conhecida como *paradoxo de Russell*. Esse paradoxo aparece porque não colocamos regras para construir conjuntos: um conjunto para nós pode ser qualquer coisa formada por elementos.

O paradoxo de Russell pode ser parafraseado através do *paradoxo do barbeiro*:
"Havia numa vila um único barbeiro o qual era homem. Nessa vila, todo homem se mantém barbeado e o barbeiro faz a barba dos homens que não se barbeiam a si mesmo, e somente destes homens".
Pergunta: quem faz a barba do barbeiro?

A maneira de encarar a teoria de conjuntos como vista acima tem outros paradoxos além do paradoxo de Russell. Os paradoxos aparecem porque ao usarmos a noção de conjuntos como acima, abrimos a possibilidade de formação arbitrária de conjuntos. Para especificar um conjunto não é suficiente pronunciar algumas "palavras mágicas". Isso significa que para a formação de conjuntos devemos ter certas regras e nem tudo que caracteriza como "algo que possui elementos" pode ser chamado de conjunto.

Essas questões a respeito da teoria de conjuntos foram levantadas na segunda metade do século XIX por matemáticos como Georg Cantor, David Hilbert e outros. Cantor é o pai da teoria de conjuntos, mas falhou em desenvolver uma teoria livre de paradoxos. Na teoria de Cantor, conhecida como *teoria ingênua dos conjuntos*, os conjuntos podem ser formados livremente através da denominada *compreensão irrestrita*, ou seja, dada qualquer propriedade $P(x)$ referente ao elemento x , podemos formar o conjunto $I = \{x | P(x) \text{ é válida}\}$. Isso leva a paradoxos como o de Russell.

A teoria foi sendo aprimorada por diversos matemáticos até que no início do século XX a *teoria axiomática dos conjuntos* foi desenvolvida. Nessa teoria há afirmações conhecidas como axiomas, as quais se aceitam como verdadeiras, as outras afirmações são obtidas a partir dos axiomas através de certas regras. A teoria axiomática de conjuntos usual é a *teoria de Zermelo-Fraenkel*. Existem outras (teoria de *Von Neumann-Gödel-Bernays* por exemplo), mas é a partir da teoria de Zermelo-Fraenkel que a matemática moderna que utilizamos é estruturada. Acredita-se, embora não se tenha provado ainda, que a teoria de Zermelo-Fraenkel é livre de paradoxos.

Mas qual a diferença entre a teoria ingênua de conjuntos e a axiomática? Na teoria axiomática de conjuntos, conjuntos bem como a relação de pertinência não são definidos e sim caracterizados através dos axiomas, mas de forma a satisfazer certas regras. Essas regras proíbem que conjuntos como o conjunto M definido acima possam ser construídos. Ou seja, na teoria axiomática de conjuntos, um conjunto não é *qualquer coisa* composta de elementos, mas é uma estrutura que satisfaz certas regras

e a qual é suficiente para podermos dar suporte à matemática. Em particular, podemos introduzir a partir dos axiomas da teoria de conjuntos os conjuntos numéricos: naturais, inteiros, racionais, reais e complexos.

References

- [1] Cohen, P. J., *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. W. J. Benjamin, 1966.
- [2] Barwise, J. (Edited by), *Handbook of Mathematical Logic*. Elsevier, 1977.
- [3] Faith, C., *Algebra: Rings, Modules and Categories I*. Springer-Verlag, 1973.
- [4] Feitosa, H. A., Nascimento, M. C., Alfonso, A. B., *Teoria dos conjuntos: sobre a fundamentação matemática e a construção de conjuntos numéricos*. Ciência Moderna, 2011.
- [5] Halmos, P., *Naive Set Theory*. Van Nostrand, 1960.
- [6] Tarski, A., *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences*, 4a ed. Oxford, 1994.