Implicação ou complicação?

Prof. Luciano Bedin-Departamento de Matemática-UFSC

A definição da conjunção $\vee$ no cálculo proposicional pode levar a algumas conclusões esquisitas quando traduzidas livremente para a linguagem coloquial. Por exemplo, consideremos as proposições

$$p: \text{ hoje está um dia ensolarado}$$

e

$$q: \text{ o conjunto dos reais é um corpo}$$

então a proposição

$$p \vee q: \text{ hoje está um dia ensolarado ou o conjunto dos reais é um corpo},$$

é uma afirmação verdadeira do ponto de vista da lógica. No entanto ela soa de forma esquisito em linguagem coloquial. Mas isso tem de ser assim para que a lógica não dependa sobre fatores externos, por exemplo, da linguagem. Note que $p \vee q$ poderia ser melhor escrita em linguagem coloquial como "*o conjunto dos números reais é um corpo estando o dia de hoje ensolarado ou não*". O fato de que a proposição $p \vee q$ é verdadeira significa que uma das duas p ou q é verdadeira, independentemente se transcrevendo na linguagem coloquial isso possa parecer esquisito ou não.

O mesmo ocorre com a implicação $p \to q$, a qual é definida no cálculo proposicional como sendo $\neg p \vee q$. Com a notação $p \to q$ na lógica queremos indicar que essa proposição é verdadeira em todos os casos, exceto quando p é verdadeira e q é falsa. Embora não temos o hábito de fazer essa análise, em linguagem coloquial, ou mesmo em matemática, quando escrevemos o "se... então..." estamos implicitamente considerando todas as possibilidades VV, FV ou FF. Por exemplo, sendo

$$p: \ n > 2 \quad \text{e} \quad q: \ n^2 > 4,$$

obviamente $p \to q$ é verdadeira. Se $n = 3$ temos VV; se $n = 1$, temos FF e se $n = -3$ temos FV. No entanto não costumamos escrever "se $1 > 2$ então $1^2 > 4$" pois soa estranho, embora seja logicamente correto. Seria menos esquisito falar "*se* 1 *fosse maior do que* 2 *então* 1^2 *seria maior do que* 4". No caso de $n = -3$ não falamos "se $-3 > 2$ então $(-3)^2 > 4$" e sim, "*é verdade que* $(-3)^2 > 4$*, embora* -3 *não seja maior do que* 2."

Como outro exemplo, consideremos as proposições

$$p: x \text{ é um metal}$$

e

$$q : x \text{ é maleável.}$$

Claramente, a afirmação $p \to q$ é verdadeira. Em linguagem coloquial temos $p \to q$ como sendo: "*se x é metal então x é maleável*".

Substituindo x por ferro temos "se ferro é metal então ferro é maleável", nesse caso p é V e q é V, mas a frase correta seria: *"sendo um metal, o ferro é maleável".*

Substituindo x por plástico temos "se plástico é metal então ferro é maleável", nesse caso p é F e q é V, mas a frase correta seria: *"plástico é maleável, embora não seja metal".*

Substituindo x por concreto temos "se concreto é metal então concreto é maleável", nesse caso p é F e q é F, mas a frase correta seria: *"se concreto fosse metal seria maleável".*

A implicação $p \to q$ assim definida no cálculo proposicional é denominada "implicação material"; note que ela depende apenas de p e q serem falsas ou verdadeiras e não de fatores externos, como a linguagem.

References

[1] Barwise, J. (Edited by), *Handbook of Mathematical Logic*. Elsevier, 1977.

[2] Hamilton, A. G., *Logics for Mathematicians*. Cambridge, 1978.

[3] Tarski, A., *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences*, 4a ed. Oxford, 1994.