Números Complexos: aspectos históricos

Prof. Luciano Bedin-Departamento de Matemática-UFSC

O primeiro registro que se tem notícia do aparecimento da raiz quadrada de um número negativo é no *Stereometria* do geômetra e engenheiro grego (ou egípcio?) Heron de Alexandria (I d.c.). De fato, conforme discutido em [7], ao que tudo indica, foi Heron quem deduziu a fórmula para o cálculo da altura de um tronco de pirâmide de base quadrada, cuja aresta mede c, o lado maior é igual a a e o lado menor é igual a b:

$$h = \sqrt{c^2 - \frac{(a-b)^2}{2}}.$$

Depois de ilustrar com sucesso o caso em que $a = 10$, $b = 2$ e $c = 9$, o autor tentou resolver o caso em que $a = 28$, $b = 4$ e $c = 15$ que é impossível pois não existe tronco de pirâmide de base quadrada com essas dimensões. Ao invés de escrever $h = \sqrt{81 - 144}$ como a fórmula exige, ele considerou $h = \sqrt{144 - 81}$. Ou seja, na *Stereometria* aparece $h = \sqrt{63}$ ao invés de $h = \sqrt{-63}$. Não se sabe ao certo se esse erro foi devido ao próprio Heron ou a um copista, mas o fato é que Heron perdeu a oportunidade de ser o primeiro acadêmico a mostrar que a raiz de um número negativo surge a partir de um problema físico (mesmo sem solução) [7]. Dois séculos mais tarde, em seu tratado *Arithmetica*, Diofanto (III d.c.) considera o seguinte problema:

Dado um triângulo retângulo com área igual a 7 e perímetro igual a 12, encontre seus lados.

O problema de Diofanto é equivalente a encontrarmos A e B tais que $AB = 14$, $A + B + \sqrt{A^2 + B^2} = 12$. Diofanto teve a ideia de reduzir o problema a uma única variável escrevendo $A = 1/x$ e assim $B = 14x$. Com isso tem-se a equação $172x = 336x^2 + 24$. Aplicando-se a fórmula de Bhaskara (conhecida desde os babilônios) temos as soluções

$$x_1 = \frac{43 + \sqrt{-167}}{168}, \quad x_2 = \frac{43 - \sqrt{-167}}{168}.$$

Mas não foi isso que Diofanto escreveu, ele simplesmente afirmou que a equação quadrática em questão não tem solução, pois "metade do coeficiente de x multiplicado por si mesmo, menos o produto do coeficiente de x^2 pelo termo constante deve ser um quadrado para existir uma solução" [7]. Isso não ocorre nesse caso pois $\left(\frac{172}{2}\right)^2 - 336 \cdot 24 = -668$. Nessa direção, o matemático hindu Mahaviracarya ($\approx$ 850 d.c.) declarou: "O quadrado de uma quantidade positiva bem como de uma quantidade negativa é positiva; a raiz quadrada de uma quantidade que é um quadrado (quadrado perfeito) é uma quantidade positiva ou negativa; uma quantidade negativa não é um quadrado." Por sua vez, Bhaskara (1114-1185), matemático indiano, afirmou: "O quadrado de um afirmativo é afirmativo; e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado."

Em 1545, G. Cardano (1501-1576) em seu livro *Ars Magna* publica um método para a resolução da equação de grau três $x^3 = px + q$. Ele obteve o que conhecemos hoje como *fórmula de Cardano*:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Note que se $q^2/4 - p^3/27 < 0$ então a fórmula envolve a raiz quadrada de um número negativo. Isso ocoree em um dos problemas do *Ars Magna*: divida 10 em duas partes cujo produto é 40. Cardano afirmou que esse problema "se manifesta como impossível" porque leva à equação $x^2 - 10x + 40 = 0$, a qual tem soluções, $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$, as quais Cardano denominou de "sofísticas" (pareciam ser uma falácia, porque ele não via como atribuir significado físico a elas) [3],[4]. Cardano observou que a soma das raízes é claramente igual a 10. Com relação ao produto escreveu "no entanto, vamos operar com essas raízes" e forneceu os seguintes cálculos [6], [2]:

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5 \cdot 5 - 5 \cdot \sqrt{-15} + 5 \cdot \sqrt{-15} - \sqrt{-15} \cdot \sqrt{-15} = 25 + 15 = 40.$$

Nesse sentido, Cardano afirma: "...esqueça a tortura mental e vá operando" [3]. E mostra uma certa suspeita com relação a esses números ao afirmar: "quanto mais refinados são os progressos da aritmética, mais parecem ser inúteis" [2]. Mas o que deixou Cardano mais perplexo foi tais raízes quadradas de números negativos ocorrerem na sua fórmula para encontrar a solução de uma equação de terceiro grau que só tem soluções reais [6]. De fato, ao aplicar sua fórmula à equação $x^3 = 15x + 4$, obteve

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

A equação em questão tem somente raízes reais, que podem ser facilmente encontradas por outros métodos: $x_1 = 4$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$, $x_3 = -2 - \sqrt{3}$. Cardano sabia disso e ficou muito frustrado ao perceber que sua fórmula não fornecia a resposta correta [7]. Com isso denominou tais cúbicas, em que esse estranho fenômeno ocorria, de *irredutíveis*.

Foi o engenheiro-arquiteto R. Bombelli (1526-1572) quem percebeu que a estranha expressão obtida pela utilização da fórmula de Cardano, na verdade, fornecia um número real, embora escrito de uma maneira nada familiar [6],[8]. Bombelli escreve em seu livro *Algebra*: "Foi uma ideia absurda na opinião de muitos; e por muito tempo essa era minha opinião também. Tudo parecia repousar em sofismas do que na verdade. No entanto, eu procurei por tanto tempo até que eu provei que este de fato é o caso" [8]. Mesmo não se sentindo completamente à vontade com raízes quadradas de números negativos, Bombelli operou livremente com elas, e aplicando as regras usuais da álgebra, concluiu que:

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1},$$

e assim

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121},$$

logo $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ e, analogamente, $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$ (ver [5]). Portanto obtém-se $x = 4$ que é uma das raízes da equação. A partir de Bombelli, tornou-se claro que manipular com $\sqrt{-1}$ usando as regras usuais da aritmética levava a resultados corretos [8]. De acordo com Nahin [7], muito do mistério, da áurea mística em torno de $\sqrt{-1}$, se dissipou depois da análise de Bombelli e matemáticos passaram a utilizá-lo, embora ainda desconfortáveis com a ideia. Vale a pena ressaltar que em seu livro *Algebra* aparece pela primeira vez uma teoria de números complexos relativamente bem estruturada inclusive com uma notação específica: o número $3\sqrt{-1}$, por exemplo, era denotado por $R[0\ m \cdot\ 9]$ (R de raiz, m de menos), ou seja, $R[0\ m \cdot\ 9] = \sqrt{0 - 9}$ [4]. Conforme afirma Reis Neto [8], o símbolo $\sqrt{-1}$ só foi introduzido em 1629 por A. Girard (1595-1632).

Mas ainda faltava uma barreira a ser ultrapassada, que era o significado físico de $\sqrt{-1}$. Como destacado em Nahin [7], matemáticos do século XVI estavam muito vinculados à tradição grega da geometria, e não se sentiam confortáveis com conceitos que não tinham significado geométrico. Mesmo dois séculos depois de Bombelli, L. Euler (1707–1783) escreve em 1770: "Todas as expressões como $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, etc., são consequentemente impossíveis ou números imaginários, desde que representam raízes de números negativos; e desses números podemos verdadeiramente afirmar que não são iguais a nada, nem mais do que nada, nem menos do que nada. Isso necessariamente os reduz a algo impossível ou imaginário" [2]. Mesmo incrédulo foi Euler, em 1777, que introduziu o símbolo i para denotar $\sqrt{-1}$ (ver [1]). Nessa direção, em seu livro *La Geometrie* de 1637, R. Descartes (1596–1650) associou números imaginários à impossibilidade de certas construções geométricas, é dele inclusive a denominação *imaginário* [2]. Reis Neto [8] e Nahin [7] afirmam que os primeiros passos concretos na direção de uma interpretação física para os números complexos foram dados pelo matemático britânico J. Wallis (1616–1703). Em 1685, em seu livro *Algebra*, Wallis aborda certos problemas de geometria plana que esbarram em raízes de números negativos, mas que podem ser resolvidos fazendo uma translação vertical adequada. Assim, mesmo não afirmando isso diretamente em seu livro, Wallis deu indícios que, num certo sentido, os números imaginários se manifestam geometricamente através de movimentos verticais no plano.

Mais de um século depois da tentativa de Wallis de representar geometricamente números imaginários, o problema foi resolvido pelo norueguês C. Wessel (1745–1818) [8], [7]. Wessel, que não era matemático e sim um agrimensor, resolveu o problema que atormentava mentes brilhantes ao longo de séculos. A ideia de Wessel foi motivada pelos problemas práticos que ele encarava diariamente no seu ofício, ou seja, foi seu trabalho que o inspirou a ter sucesso onde muitos falharam. Sua interpretação para o número $a + bi$: um vetor da origem do plano cartesiano ao ponto (a, b). O plano cartesiano passa a ser chamado de *plano complexo*, com o eixo x denominado *eixo real* e o eixo y denominado *eixo imaginário* [3]. Nesse contexto, a soma de números complexos corresponde à soma usual de vetores do plano e o produto representa certas rotações no plano [6]. Em 1797, Wessel apresentou o trabalho *On the analytic representation of direction: an attempt* à Academia Real Dinamarquesa de Ciências, trabalho que foi publicado em 1799. No entanto o trabalho foi escrito em dinamarquês e publicado num jornal que não tinha muita circulação o que o impediu de ser lido por muitas pessoas [8], [7]. Por isso seu trabalho, embora brilhante, não teve nenhum impacto no meio acadêmico. Foi somente em 1895 que o trabalho foi redescoberto e os devidos créditos a Wessel foram dados pela descoberta do significado geométrico dos números complexos [7]. Trabalhando independentemente, o suíço J. R. Argand (1768–1822) associou os números imaginários ao eixo vertical y, assim como na concepção idealizada por Wessel [6],[7],[8]. Em 1806, tendo feito algumas cópias do trabalho intitulado *Essay on the Geometrical Interpretation of Imaginary Quantities*, uma delas foi parar nas mãos do matemático francês A. M. Legendre (1752–1833) que o submeteu imediatamente ao matemático, que era de fato um militar, F. Francais (1768–1810), o qual estava especialmente interessado no assunto devido a problemas envolvendo artilharia. Francais intercedeu para a publicação do trabalho na importante revista *Annales de Mathématiques*. Em 1813 o trabalho foi publicado, e, mais tarde, Francais escreveu uma nota no mesmo jornal afirmando que Argand fora o primeiro a desenvolver a geometria dos números complexos. Evidentemente Francais não havia ouvido falar de Wessel. A respeito disso, o matemático francês G. J. Hoüel escreveu, em 1876: "O primeiro a mostrar como representar $a + bi$ através de pontos no plano, e a dar regras geométricas para sua adição e multiplicação foi Argand...a menos que algum trabalho mais antigo seja descoberto, Argand deve ser lembrado como o verdadeiro fundador da teoria das quantidades complexas num plano" [7]. De fato, duas décadas depois o trabalho de Wessel foi redescoberto pelo matemático dinamarquês S. C. Juel (1855-1935), e sua significância reconhecida e divulgada. Há historiadores que afirmam que C. F. Gauss (1777-1855) tinha conhecimento do significado geométrico dos números complexos antes de Wessel, mas ele se negava a publicar seus resultados até que estivessem, nas suas palavras, "amadurecidos" [2],[4],[8]. De fato, em sua tese de doutorado, aos 21 anos, Gauss havia utilizado números complexos para provar oTeorema Fundamental da Álgebra, que afirma que toda equação algébrica tem pelo menos uma raiz complexa. Em 1831 ele finalmente atingiu um nível de amadurecimento a respeito de números complexos (a propósito, o termo *complexo* foi por ele cunhado) e publicou seus resultados [1]. E estes foram contundentes, com importantes contribuições à área. Por exemplo, ele levantou uma questão profunda: existe uma hierarquia de números complexos? Isto é, existem números "mais complexos" do que os usuais? Mais tarde ele mesmo respondeu essa questão, concluindo que a resposta é não [7]. Em sua homenagem o plano complexo é às vezes denominado de *plano Gaussiano* ou *plano de Argand-Gauss.*

Em 1829, o jovem físico e matemático irlandês W. R. Hamilton (1805-1865) tomou conhecimento, por meio de trabalhos subsequentes ao de Argand, da representação geométrica dos números complexos [4]. Hamilton ficou insatisfeito com essa concepção, pois para ele, $\sqrt{-1}$ deveria ter uma interpretação puramente algébrica. Como ele mesmo escreveu, mais tarde, em 1853: "Me sentia insatisfeito com qualquer ponto de vista que não dá aos números imaginários uma interpretação clara e com significado; e desejava que isso pudesse ser feito, sem introduzir considerações tão expressamente geométricas como o conceito de ângulo" [7]. Em 1835 ele apresenta à Academia Irlandesa de Ciências um artigo onde define o número complexo $a + bi$ como sendo o par ordenado (a, b), sendo que esses pares ordenados operam entre si da seguinte forma:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Essas operações são definições, mas Hamilton se baseou na interpretação geométrica que já havia sido dada, e sabia como números complexos deveriam operar entre si. Assim definidos, pode-se mostrar que, através de operações puramente algébricas, todas as propriedades geométricas dos números complexos como obtidas por Argand e Wessel são válidas.

References

[1] Almeida, S. P., *Números complexos para o Ensino Médio: Uma abordagem com história, conceitos básicos e aplicações*. Trabalho de conclusão de curso, PROFMAT/CCT/UFCG, 2013.

[2] Carmo, M. P. et al., *Trigonometria e números complexos*. 3a ed.. SBM, 2005.

[3] Carneiro, J. P., *A geometria e o ensino de números complexos*. Anais do VIII ENEM, 2004.

[4] Iezzi, G., *Fundamentos de matemática elementar, vol. 6*. 6a ed.. Atual Editora, 2002.

[5] Lima, E. L., *Meu professor de matemática e outras histórias*. 5a ed.. SBM, 2006.

[6] Monzon, L. W., *Números complexos e funções de variável complexa no ensino médio-uma proposta didática através do uso de objeto de aprendizagem*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática-UFRGS, 2012.

[7] Nahin, P. J., *An imaginary tale: The Story of* $\sqrt{-1}$. Princeton University Press, 1998.

[8] Reis Neto, R. M., *Alternativa Metodológica para o Ensino e Aprendizagem de Números Complexos: Uma Experiência com Professores e Alunos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2009.